

Logisk semantik II

1 Predikatlogik, generella och existentiella satser

1.1 Viktiga begrepp så här långt

Vi skall nu bygga vidare på de fyra byggstenar i logiken som vi tidigare infört. Det nya här är variabler (som vi skriver x, y, z) och kvantifikatorer, **existenskvantifikatorn** – vars symbol är " \exists " – och **allkvantifikatorn** (" \forall ").

(1) Negation:

	godtycklig sats:	dess negation:
I symboler:	p	$\neg p$
Möjlighet (1):	S	F
Möjlighet (2):	F	S

(2) Konnektiver:

	sats (1)	sats (2)	konjunktion	disjunktion	implikation
I symboler:	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
Möjlighet (1):	S	S	S	S	S
Möjlighet (2):	S	F	F	S	F
Möjlighet (3):	F	S	F	S	S
Möjlighet (4):	F	F	F	F	S

(3) **Individkonstanter** är namn på objekt i logiken. Vi skriver dem med gemener.

(4) **Predikat** prediceras om individer, och vi får utsagor som är sanna eller falska. Vi skriver dem med versaler. Syntaktiskt sett kan predikat appliceras på individkonstanter. Dessa är då argument till predikatet.

Enkelt exempel i detalj:

Svenska: *Fredrik Rheinfeldt är moderat*

Predikatlogik: $M(r)$.

Individkonstant: r . Avsikt: r står för Fredrik Rheinfeldt.

Predikat: M . Avsikt: M står för (egenskapen att vara) moderat.

Syntax: i $M(r)$ är r argumentet till M .

1.2 Generalitet

En viktig sak i språk och tänkande är att kunna fånga generella samband. Generalitet är en aspekt av all kunskap som man kan använda för att orientera sig i nya situationer.

Låt oss än en gång betrakta satsen *Om du är i Göteborg, så är du vid västkusten*. I detta sammanhang kan *du* tänkas representera en godtycklig person. Satsen kan därmed, som sagt, ses som en generell ”geografisk” sanning.

Vi skulle också kunna uttrycka oss på sätt som dessa:

Om man är i Göteborg, så är man vid västkusten.

Om en godtycklig individ är i Göteborg, så är den vid västkusten.

Vi kan också använda variabler, t.ex. x , som i matematisk notation: Dessa variabler står för individer, men det är öppet vilka. De kan stå på samma platser som individkonstanter, alltså som argument till predikat.

Om x är i Göteborg, så är x vid västkusten.

Om vi vill vara extra tydliga med att detta gäller generellt skulle vi kunna skriva:

Det gäller generellt, för alla x , att om x är i Göteborg, så är x vid västkusten.

Om vi nu inför individkonstanterna g och v för Göteborg, respektive västkusten, samt predikatet B för att befinna sig i eller vid en plats, så får vi (på ett blandspråk):

Det gäller generellt, för alla x , ($B(x, g) \rightarrow B(x, v)$)

Nu kan vi tänka oss att denna generalitet omfattar fyra logiskt möjliga fall, varav en utesluts av exempelsatsen. (Satsen är sann och det handlar om uteslutandet av en ”geografisk omöjlighet”):

$B(x, g)$	$B(x, v)$	$(B(x, g) \rightarrow B(x, v))$	exempelsituation
S	S	S	x är i Göteborg och vid västkusten. (Tänkbart.)
S	F	F	x är i Göteborg, men inte vid västkusten. (Uteslutet.)
F	S	S	x är i Halmstad och vid västkusten. (Tänkbart.)
F	F	S	x är i Uppsala och inte vid västkusten. (Tänkbart.)

Satsen *Det gäller generellt, för alla x , ($B(x, g) \rightarrow B(x, v)$)* vill vi komprimera lite mer. Det här med generalitet är ju så viktigt att det kan vara lämpligt med en särskild symbol för det. Vi har för det ändamålet **allkvantifikatorn** (” \forall ”).

$\forall x(B(x, g) \rightarrow B(x, v))$

Låt oss ta ett annat exempel (på en rimligtvis falsk sats):

Om man är i Göteborg, så är man på Kungsportsavenyn (k).

(Alla som är i Göteborg är på Kungsportsavenyn (k).

$\forall x(B(x, g) \rightarrow B(x, k))$

Men det är inte sant, så om vi negerar får vi en sann sats:

Det är inte (generellt sett) så att om man är i Göteborg, så är man på Kungsportsavenyn.

(Alla som är i Göteborg är inte på Kungsportsavenyn.)

$\neg \forall x(B(x, g) \rightarrow B(x, k))$

$\forall x(B(x, g) \rightarrow B(x, k))$ är falsk eftersom, säg en godtycklig person som befinner sig på Backaplan som värde på x skulle göra implikationen ($B(x, g) \rightarrow B(x, k)$) falsk, och därmed $\forall x(B(x, g) \rightarrow B(x, k))$.

Fler exempel (rimligtvis sanna eller nästan sanna utsagor):

Inte alla tomater (T) är röda (R).

$$\neg \forall x(T(x) \rightarrow R(x))$$

Inga tomater (T) är lila (L).

(d.v.s. Alla tomater är icke-lila.)

$$\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$$

Inga gröna paprikor är mogna.

$$\forall x((G(x) \wedge P(x)) \wedge \neg M(x))$$

Inte alla paprikor är gröna.

$$\neg \forall x(P(x) \rightarrow G(x))$$

Alla paprikor är gröna eller röda.

$$\forall x(P(x) \rightarrow (G(x) \vee R(x)))$$

Alla paprikor som är gula eller röda är mogna.

$$\forall x((P(x) \wedge (G(x) \vee R(x))) \rightarrow M(x))$$

Ingen som är i Göteborg befinner sig på Sergels torg (s).

$$\forall x(B(x, g) \rightarrow \neg B(x, s))$$

Ingen befinner sig (samtidigt) i Göteborg och på Sergels torg.

$$\forall x \neg (B(x, g) \wedge B(x, s))$$

Inte alla befinner sig i Göteborg eller på Sergels torg.

$$\neg \forall x(B(x, g) \vee B(x, s))$$

1.3 "Multipel" generalitet

Vi kan kombinera generalitet i en utsaga, t.ex. uttala oss generellt om apelsiner och citroner:

Citroner (C) är surare än (S) apelsiner (A).

(Varje citron är surare än varje apelsin.)

$$\forall x \forall y((C(x) \wedge A(y)) \rightarrow S(x, y))$$

1.4 Existentiella satser

Vi har hittills enbart sett på det fallet då variabler kopplats till generalitet, alltså till "∀". Men det går även att knyta en variabel till kravet att det skall finnas minst ett objekt som kopplat till variabeln gör den aktuella formeln sann. Motsvarande symbol är "∃". "∀" och "∃" kallas kvantifikatorer och fungerar syntaktiskt sett på samma sätt. De "binder" variabler.

Det finns tomater (T) som är röda (R).

(Mer strikt: Minst en sak är en tomat och röd)

$$\exists x(T(x) \wedge R(x))$$

Det finns tomater (T) som inte är röda (R).

(Mer strikt: Minst en sak är en tomat och inte röd)

$$\exists x(T(x) \wedge \neg R(x))$$

Det finns inte lila tomater.

(Ingen sak är en tomat och (samtidigt) lila.)

$$\neg \exists x(T(x) \wedge L(x))$$

Denna sista sats är synonym med denna (som vi hade ovan):

Inga tomater T är lila (L).
 (d.v.s. *Alla tomater är icke-lila.*)
 $\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$

Mer om denna synonymi nedan.

1.5 Sambandet mellan existentiella och generella satser

Sammanfattningsvis är det så att om vi har en formel med en variabel x , så kan vi sätta samman den med en operator som **binds** variabeln. I predikatlogiken brukar man använda två sådana operatörer, **existenskvantifikatorn** – vars symbol är " \exists " – och **allkvantifikatorn** (" \forall "). Dessa kombineras med en variabel – den variabel som binds – och kopplas samman med en formel. De kan förstås på följande sätt (x kan vara vilken variabel som helst:

" $\exists x \dots$ " – det gäller för något x att \dots *eller* det finns minst ett objekt som kan kopplas till x så att \dots blir sann. (Variabeln x binds av " \exists ".)

" $\forall x \dots$ " – det gäller för alla x att \dots *eller* oavsett vilket objekt som kopplas till x så blir \dots sann. (Variabeln x binds av " \forall ".)

Egentligen behövs bara en av de båda kvantifikatorerna, eftersom den ena kan definieras med hjälp av den andra och negation. Att alla objekt uppfyller ett visst villkor innebär att det *inte finns någonting* som *inte uppfyller* villkoret ifråga. Och att minst ett objekt uppfyller ett villkor innebär att *inte alla objekt icke-uppfyller* villkoret. I predikatlogikens notation kan vi uttrycka detta sålunda:

" $\exists x(F(x))$ " betyder " $\neg \forall x(\neg F(x))$ ".

" $\forall x(F(x))$ " betyder " $\neg \exists x(\neg F(x))$ ".

" $F(x)$ " står här för vilket villkor som helst, d.v.s. en godtycklig formel som innehåller variabeln x .

Konsekvensen av dessa samband är att man kan betrakta *en* kvantifikator som grundläggande, men det är praktiskt att ha båda för att slippa skriva ut de negationer som skulle behövas om man bara hade den ena.

Med hjälp av dessa samband och några ur satslogiken kan man visa varför följande synonymi råder:

Inga tomater T är lila (L).
 (d.v.s. *Alla tomater är icke-lila.*)
 $\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$

Det finns inte lila tomater.
 (Ingen sak är en tomat och (samtidigt) lila.)
 $\neg \exists x(T(x) \wedge L(x))$

Vi har: $\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$ (1)

Vi har tidigare sett: " $p \rightarrow q$ " är samma som " $\neg(p \wedge \neg q)$ " (2)

Alltså, ur (1) och (2): $\forall x \neg(T(x) \wedge \neg \neg L(x))$ (3)

Alltså, ur (3), då dubbla negationer tar ut varandra: $\forall x \neg(T(x) \wedge L(x))$ (4)

Om vi tillämpar ekvivalensen mellan " $\forall x(F(x))$ " och " $\neg \exists x(\neg F(x))$ " på (4), så får vi:

$\neg \exists x \neg \neg(T(x) \wedge L(x))$ (5)

Alltså, ur (5), då dubbla negationer tar ut varandra: $\neg \exists x(T(x) \wedge L(x))$

1.6 Fler exempel

<i>Det finns paprikor som varken är gula eller röda.</i>	$\exists x(P(x) \wedge \neg(G(x) \vee R(x)))$
<i>Pelle gillar någon.</i>	$\exists x(G(p, x))$
<i>Någon gillar Pelle.</i>	$\exists x(G(x, p))$
<i>Pelle gillar inte någon.</i>	$\neg \exists x(G(p, x))$
<i>Ingen gillar Pelle.</i>	$\neg \exists x(G(x, p))$
<i>Det finns en hund som Pelle gillar.</i>	$\exists x(H(x) \wedge G(p, x))$
<i>Det finns en hund som Pelle inte gillar.</i>	$\exists x(H(x) \wedge \neg G(p, x))$
<i>Pelle gillar alla hundar.</i>	$\forall x(H(x) \rightarrow G(p, x))$
<i>Alla hundar gillar Pelle.</i>	$\forall x(H(x) \rightarrow G(x, p))$
<i>Inga hundar gillar Pelle.</i>	$\neg \exists x(H(x) \wedge G(x, p))$
<i>Endast hundar gillar Pelle.</i>	$\forall x(G(x, p) \rightarrow H(x))$

1.7 Exempel med multipel kvantifikation

I många utsagor kombineras fler än två kvantifikationer. Dessa kan analyseras med hjälp av predikatlogik:

Ingen gillar alla hundar.

$$\neg \exists x(\forall y(H(y) \rightarrow G(x, y)))$$

Alla katter gillar alla hundar.

$$\forall x(\forall y((K(x) \wedge H(y)) \rightarrow G(x, y)))$$

Alla katter gillar sig själva.

$$\forall x(K(x) \rightarrow G(x, x))$$

Det finns en katt som alla hundar gillar.

$$\exists x(K(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow G(y, x)))$$

Det finns en katt som gillar alla hundar.

$$\exists x(K(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow G(x, y)))$$

Pelle ser en hund och en katt.

$$\exists x(\exists y(S(p, x) \wedge S(p, y) \wedge H(x) \wedge K(y)))$$

Det finns en katt som inte gillar någon hund.

$$\exists x(K(x) \wedge \neg \exists y(H(y) \wedge G(x, y)))$$

Alla människor har en fader och en moder.

$$\forall x(M_1(x) \rightarrow \exists y(\exists z(F(y, x) \wedge M_2(z, x))))$$

Ingen människa har sett en enhörning.

$$\neg \exists x(\exists y(M_1(x) \wedge S(x, y) \wedge E(y)))$$

1.8 En definition och dess logiska struktur

Begreppet *helbror* har ett förhållandevis precist innehåll. Vi skulle kunna definiera det på följande sätt:

Det gäller för alla X och Y – d.v.s. oavsett vilka objekt vi låter X och Y representera – att

[definiendum] X är helbror till Y
om och endast om

[definiens] X och Y är två olika personer *och*
 X är man *och*
det finns två objekt F_1 och F_2
som är sådana att
 F_1 är förälder till X *och*
 F_2 är förälder till X *och*
 F_1 är förälder till Y *och*
 F_2 är förälder till Y .

Uttrycket *om och endast om* uttrycker nödvändiga (*endast om*) och tillräckliga (*om*) villkor. Det svarar mot ett konnektiv som är sant då delsatserna har samma sanningsvärde, alltså är två sanna eller två falska satser. Detta konnektiv brukar heta ekvivalens, och uttrycks med symbolen ' \leftrightarrow '. $p \leftrightarrow q$ innebär alltså att p och q har samma sanningsvärde. Låt oss jämföra det med våra tidigare konnektiver:

	sats (1)	sats (2)	konjunktion	disjunktion	implikation	ekvivalens
I symboler:	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Möjlighet (1):	S	S	S	S	S	S
Möjlighet (2):	S	F	F	S	F	F
Möjlighet (3):	F	S	F	S	S	F
Möjlighet (4):	F	F	F	F	S	S

' $p \leftrightarrow q$ ' säger samma sak som ' $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ', vilket förklarar symbolens utseende (ömsesidig implikation, s.a.s.).

p	\leftrightarrow	q	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
S	S	S	S
S	F	F	S
F	F	S	F
F	S	F	S

Predikatlogiken tillåter oss också att formalisera en sådan definition. Vi får då en formel av detta slag. Den är uppställd så att strukturen framgår tydligt.

$$\forall x \forall y (B(x, y) \leftrightarrow (\neg(x = y) \wedge M(x) \wedge \exists z_1 \exists z_2 ((z_1 \neq z_2 \wedge F(z_1, x) \wedge F(z_2, x) \wedge F(z_1, y) \wedge F(z_2, y))))))$$